Chapitre 2

Généralités sur les fonctions numeriques

I. *Parité et périodicité d'une fonction*

1) Fonctions paires

Définition 1.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à zéro ou que D est centré en zéro, si et seulement si :

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $[\ x \in D$ ssi $-x \in D\ ]$

Exemples.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $[-\pi\,;+\pi]$, $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;+1\}$ sont symétriques par rapport à zéro.

$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, [1 ;+∞[ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

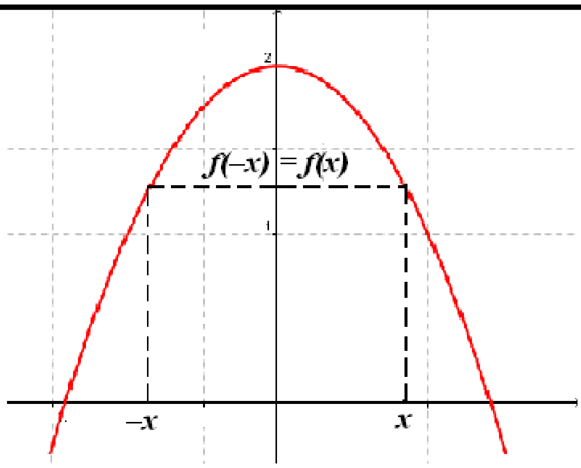
Définition 2.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D.
On dit que f est ***paire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$: $[\ f(-x) = f(x)\ ]$

Théorème 1

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*



Exemple :(modèle)

La fonction carrée $x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Définition 3.

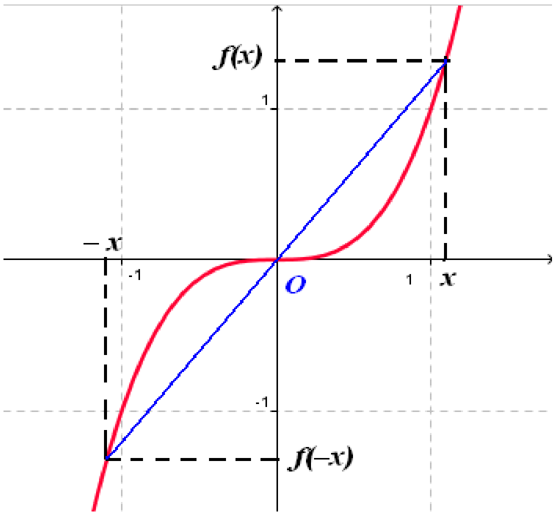
Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D.
On dit que f est ***impaire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$: $[\ f(-x) = -f(x)\ ]$

A.AFAADAS a.afaadas@gmail.com

Théorème 2

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'origine O du repère.*



Exemple :(modèle)

La fonction cube $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire car

$D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Remarque : Si une fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de D_f. La courbe de f peut alors se construire *par symétrie* par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine O du repère.

3) *Fonctions périodiques*

Définition 4.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D et $T \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On dit que f est ***périodique** de **période T*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D$ ssi $x + T \in D$]

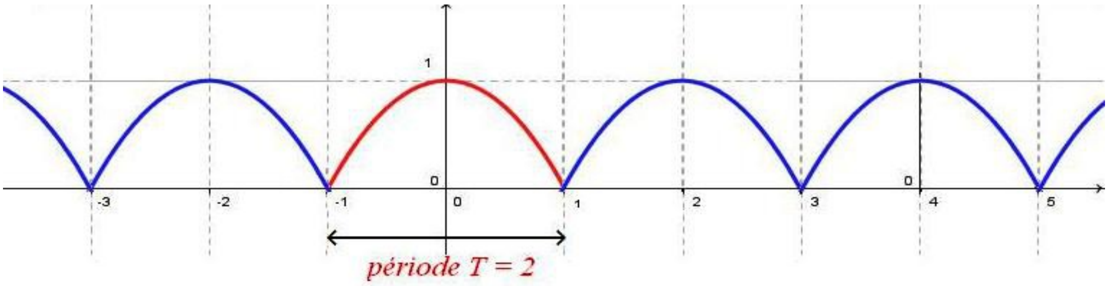
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(x+T) = f(x)$]

Remarque : Pour construire la courbe d'une fonction périodique f de période $T \in \mathbb{R}$, on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T, puis *on duplique indéfiniment* cette portion à droite et à gauche.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de D_f.

Exemple.

Pour construire sur $\mathbb{R}$ la fonction périodique de période T = 2 et définie pour $x \in [-1\,;+1]$ par : $f(x) = 1 - x^2$, il suffit de construire la courbe de f sur un intervalle de longueur une période, ici $[-1\,;+1]$, puis dupliquer indéfiniment.



II. *Fonctions trigonométriques*

1) Rappels et définitions

Dans un repère orthonormé (O ; I , J) du plan, soit M un point quelconque du cercle trigonométrique C(O; 1) tel que la mesure en *radians* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à x *radians*. On dit que M est le *point associé* à x sur le cercle C(O; 1).

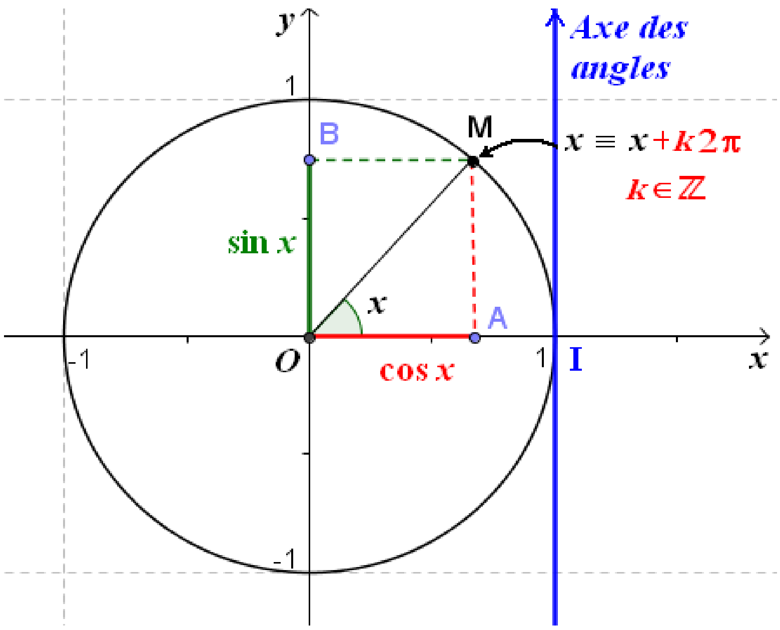
Définition 1.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soit x un nombre réel et M le point associé à x sur C(O; 1). Alors

- le **cosinus de x**, noté **cos x**, désigne l'abscisse du point M ;
- le **sinus de x**, noté **sin x**, désigne l'ordonnée du point M.

On définit ainsi deux fonctions, **cos** et **sin** sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$$



2) *Propriétés*

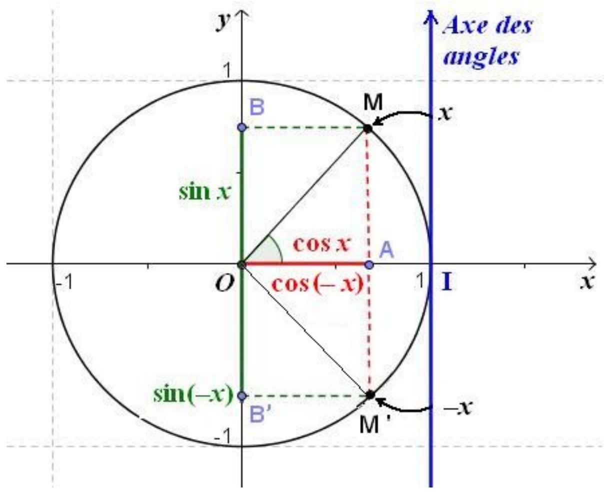
Propriété 1

Les fonctions cosinus et sinus sont *définies* sur tout $\mathbb{R}$. De plus :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: **cos (–*x*) = cos *x*.** Donc la fonction cosinus est ***paire***.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: **sin (–*x*) = – sin *x*.** Donc la fonction sinus est ***impaire***.

Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,

- La courbe de la fonction ***cosinus*** *est symétrique par rapport à l'axes des ordonnées*. Donc, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$.
- La courbe de la fonction ***sinus*** *est symétrique par rapport à l'origine O* du repère. Donc, on peut aussi réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$.



Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté soit égale à *x radians*. On peut lui associer une *famille de nombres réels* de la forme , , qui correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique.

Propriété 2

Les fonctions cosinus et sinus sont ***périodiques*** de ***période*** $T = 2\pi$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

En effet; les nombres x et $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique. Donc x et $x + k2\pi$ ont exactement le même cosinus en abscisse et le même sinus en ordonnée.

Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à un intervalle de longueur $T = 2\pi$. Par exemple, $D = [-\pi ; +\pi]$.

III) Les oprérations sur les fonctions

1) Comparaison de fonctions

Définition 3 :On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si :
- ➪ Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- ➪ Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

Exemple :

Les fonction f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 0$, ce qui donne $D_f =]-\infty; -3[\cup[1; +\infty[$

Pour g, on doit avoir : $x-1 \geqslant 0$ et $x+3 > 0$, ce qui donne $D_g = [1; +\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonction ne sont donc pas égales.

On remarquera cependant que sur $[1; +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

Définition : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que :
- ➪ f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leqslant g$ sur I.
- ➪ f est positive sur I lorsque : $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. On note : $f \geqslant 0$ sur I.
- ➪ f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.
- ➪ f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in I$.
- ➪ f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels M et m tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. (f est majorée et minorée)

Remarque : La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale car deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On a par exemple :

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2 < 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(2) < g(2)$$

Exemple **:** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$. Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

La parabole représentant f est tournée vers le bas et son sommet a pour ordonnée $\frac{1}{4}$. La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$.

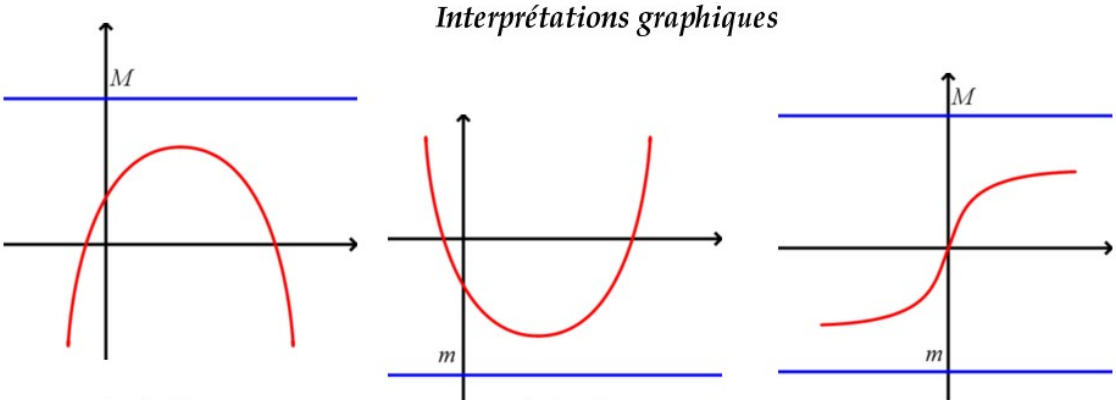
Exemple **:** Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$ est bornée.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -4 &\leqslant 4\sin x \leqslant 4 \\ -7 &\leqslant 4\sin x - 3 \leqslant 1 \\ -7 &\leqslant g(x) \leqslant 1 \end{aligned}$$

g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Interprétations graphiques



f majorée *f minorée* *f bornée*

Propriéte : Si f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ alors f est bornée.

Démonstration **:** Supposons que f est croissante sur $[a; b]$ (le cas f décrois-sante se traite de façon analogue).

Soit $x \in [a; b]$, on a alors : $a \leqslant x \leqslant b$, comme f est croissante, elle conserve la relation d'ordre, d'où : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. On peut prendre $m = f(a)$ et $M = f(b)$, f est donc bornée.

2)Variations d'une fonction

Définition : Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non)

Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si :
  pour tous u et v de I : $v > u \Rightarrow f(v) > f(u)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si :
  pour tous u et v de I : $v > u \Rightarrow f(v) < f(u)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si :
  f est croissante sur I ou décroissante sur I.

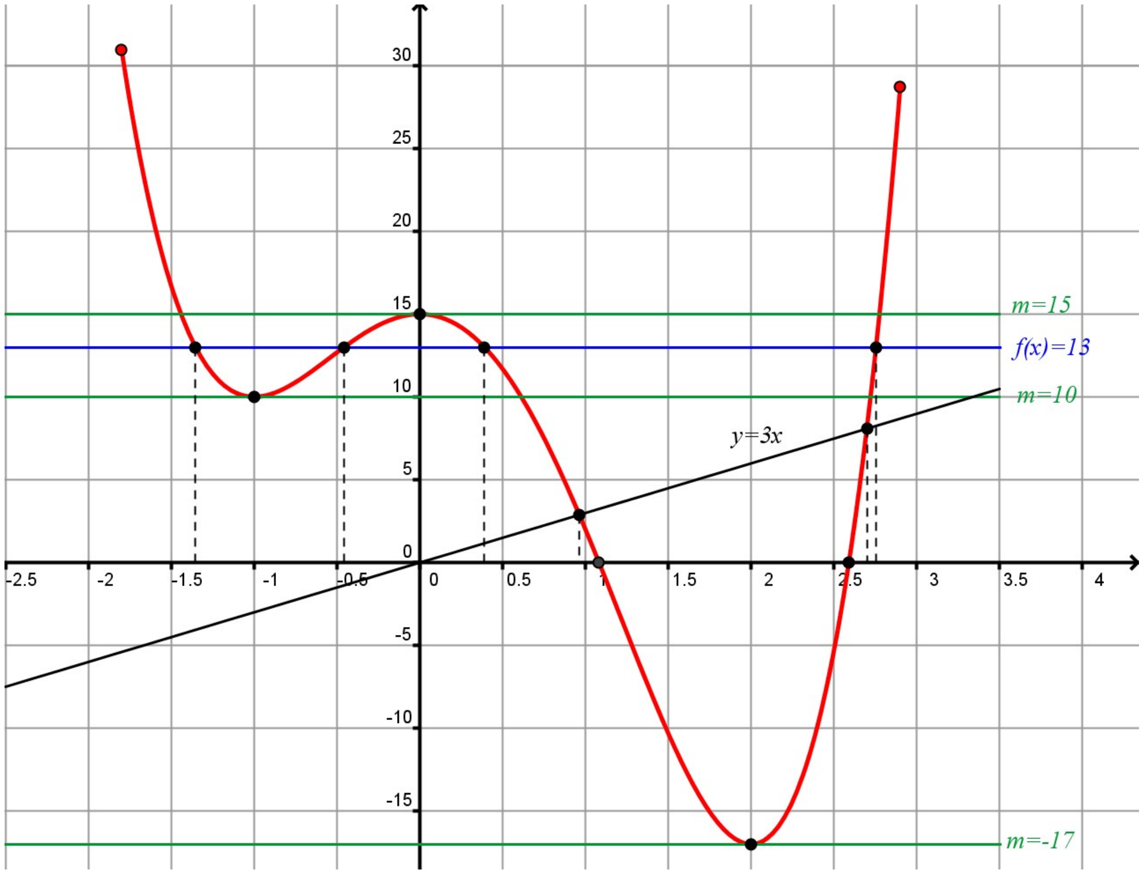
Remarque : On dit qu'une fonction craoissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Nous verrons au chapitre suivant que la fonction dérivée est l'instrument qui permet de déterminer les variations d'une fonction.

2) Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $[-1,8;2,9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$ dont la représentation se trouve à la page suivante :

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f
2) Résoudre les équations suivantes :
   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$
3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.
4) Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$
5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$



1) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1,8		-1		0		2		2,9
$f(x)$	31	↘	10	↗	15	↘	-17	↗	29

2) a) $f(x) = 0$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, on obtient donc :

$$x_1 \simeq 1,1 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,6$$

b) $f(x) = 13$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = 13$, on obtient donc :

$$x_1 \simeq -1,3 \qquad x_2 \simeq -0,4 \qquad x_3 \simeq 0,4 \qquad x_4 \simeq 2,75$$

3) $f(x) = m$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = m$, on obtient donc suivant les valeurs de m :

- ➪ Si $m < -17$: l'équation n'a pas de solution
- ➪ Si $m = -17$: l'équation admet une solution (positive)
- ➪ Si $-17 < m < 10$: l'équation admet deux solutions (2 positives)

- Si $m = 10$: l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
- Si $10 < m < 15$: l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)
- Si $m = 15$: l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
- Si $m > 15$: l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)

4) a) $f(x) \leqslant 0$: On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc :

$$S = [1,1; 2,6]$$

b) $f(x) > 13$: On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :

$$S = [-1,8; -1,3[\cup] - 0,4; 0,4[\cup]2,75; 2,9]$$

5) $f(x) = 3x$: On cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 3x$. On trace donc sur le graphique cette droite puis on lit les solutions :

$$x_1 \simeq 0,9 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,7$$

4) Composée de deux fonctions

Définition

Lorsqu'on applique deux fonctions successivement, on parle de composition de fonctions ou de composée de deux fonctions. On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g\left[f(x)\right] = g \circ f(x)$$

Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$f\left(D_f\right)$: représente l'image de l'ensemble de définition de f par la fonction f. Pour pouvoir appliquer ensuite la fonction g, il est nécessaire que cet ensemble soit inclut dans D_g : $f\left(D_f\right) \subset D_g$

$$\forall x \in D_f \quad \text{on doit avoir} \quad f(x) \in D_g$$

Exemple : : Soit les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = 3x + 4$ on a donc : $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on a donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Comme la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $f\left(D_f\right)$ n'est pas inclus dans D_g. Il faut donc réduire D_f.

On doit enlever la valeur de x tel que : $f(x) = -1$

$$3x + 4 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

On a alors l'ensemble de définition de la composée : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$

Définition **:** Soit 2 fonctions f et g avec $f(D_f) \subset D_g$.
On appelle fonction composée de f par g, la fonction notée : $g \circ f$ telle que :

$$g \circ f(x) = g\,[f(x)]$$

Remarque :La composée de deux fonctions n'est pas commutative c-a-d gof diferent de fog

Exemple **:** Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x + 3$$

Les deux fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$. On a :

$$g \circ f(x) = g\,(x-2) = 4(x-2) + 3 = 4x - 5$$
$$f \circ g(x) = f\,(4x+3) = (4x+3) - 2 = 4x + 1$$

Application

1) Soit les deux fonctions suivantes f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ après avoir précisé les ensembles de définition.

On détermine $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$

Comme la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, $D_{g \circ f} = D_f$, on a alors :

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

Pour $f \circ g$, on doit enlever la valeur : $g(x) = -1$, soit $3x = -1$ et donc $x = -\frac{1}{3}$.

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = f(3x) = \frac{1}{3x+1}$$

Il est nécessaire de déterminer l'ensemble de définition avant de calculer la composée de deux fonctions comme nous allons le voir sur cet exemple.

2) f et g sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

On pose $h = g \circ f$.

a) Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitement $h(x)$.

b) La fonction k est définie par $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$.

Les fonction h et k sont-elles égales ?

a) On a $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.
On doit donc enlever la valeur telle que $f(x) = -2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+1} &= -2 \\ x+3 &= -2x-2 \\ 3x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

On a donc $D_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}; -1\right\}$

$$h(x) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1}+2}$$

on multiplie numérateur et dénominateur par $x+1$

$$= \frac{x+3}{x+3+2x+2} = \frac{x+3}{3x+5}$$

b) $D_k = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$. Les fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition

Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaires pour connaître ses variations

3) Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

$$f_1(x) = \frac{1}{3x-1} \qquad f_2(x) = \sqrt{x+3} \qquad f_3(x) = 3\sqrt{x}+4$$

Pour la fonction f_1, on pose $f_1 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = 3x-1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Pour la fonction f_2, on pose $f_2 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = x+3 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Pour la fonction f_3, on pose $f_3 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 3x+4$$

5) *Variations d'une fonction composée*

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur $f(I)$.

- Si f et g ont **même variation** respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des **variations opposés** respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Démonstration **:** Nous ferons la démonstration pour une fonction f croissante sur I et une fonction g décroissante sur $f(I)$.

On sait que f est décroissante sur I, donc dans I :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad f(u) < f(v)$$

On sait que g est décroissante sur $f(I)$, donc dans $f(I)$:

$$\text{si} \quad f(u) < f(v) \quad \text{alors} \quad g[f(u)] > g[f(v)]$$

On a donc dans I :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad g \circ f(u) > g \circ f(v)$$

La fonction $g \circ f$ est décroissante sur I

Exemple : Soit la fonction h définie sur $]-\infty; 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de h.

1) La fonction h se décompose en $g \circ f$, on a alors :

$$f(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

2) On sait que la fonction :
   - f est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et $f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$
   - g est croissante sur $[0; +\infty[$

   d'après le théorème des fonctions composées, h est décroissante sur $]-\infty; 1]$

   On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0